6. Tutorium – Theoretische Mechanik

1. Trägheitstensor

Wiederholung letzte Woche: $T = \frac{M}{2}\dot{\vec{S}}^2 + \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}'^2$

Wir analysieren den Term für die Rotationsenergie: E_{rot}

$$E_{rot} = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}'^2 \qquad \text{mit } \dot{\vec{r}}' = \vec{\omega}' \times \vec{r}'$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2}\left[(\vec{\omega}' \times \vec{r}_i') \cdot (\vec{\omega}' \times \vec{r}_i')\right]$$

$$\overset{*}{=} \sum_i \frac{m_i}{2}\left[(\vec{\omega}' \cdot \vec{\omega}')(\vec{r}_i' \cdot \vec{r}_i') - (\vec{\omega}' \cdot \vec{r}_i') \cdot (\vec{r}_i' \cdot \vec{\omega}')\right]$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2}\left[\omega'^2 r_i'^2 - (\vec{\omega}' \cdot \vec{r}_i')^2\right]$$

Betrachtet man die Terme komponentenweise, erhält man:

$$E_{rot} = \sum_i \frac{m_i}{2}\left[\omega_j \cdot \omega_j\, r_i'^2 - \omega_j r_{ij}' \cdot \omega_k r_{ik}'\right] \qquad r_{ij} = (\vec{r}_i)_j$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2}\left[\omega_j' \delta_{jk} \omega_k' r_i'^2 - \omega_j' r_{ij}' \cdot \omega_k' r_{ik}'\right]$$

$$= \frac{1}{2}\omega_j'\left(\sum_i m_i \left[\delta_{jk} r_i'^2 - r_{ij}' r_{ik}'\right]\right)\omega_k'$$

Wir definieren nun den Trägheitstensor:

$$\left\| \; \Theta_{jk}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\delta_{jk} r_i'^2 - (\vec{r}_i)_j (\vec{r}_i)_k\right) \; \right\|$$

$$\Rightarrow E_{rot} = \frac{1}{2}\omega_j' \Theta_{jk} \omega_k' = \frac{1}{2}\vec{\omega}'^T \hat{\Theta} \vec{\omega}'$$

Als Matrix: $$\hat{\Theta}' = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i'^2 + z_i'^2 & -x_i' z_i' & -x_i' z_i' \\ -x_i' y_i' & x_i'^2 + z_i'^2 & -y_i' z_i' \\ -x_i' z_i' & -y_i' z_i' & x_i'^2 + y_i'^2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: $\hat{\Theta}$ ist symmetrisch $\hat{\Theta}^T = \hat{\Theta}$

Bei kontinuierlichen Masseverteilungen muss über die gesamte Ausdehnung des starren Körpers integriert werden.

$$\Theta_{jk} = \int \rho(\vec{r})\left(\delta_{jk}\vec{r}^2 - r_j r_k\right) d^3r$$

Für eine Drehung um die z-Achse ergibt sich die bereits bekannte Formel für eine Trägheitsachse in z-Richtung:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \hat{\Theta} \vec{\omega} = \frac{1}{2}(0, 0, \omega)\begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\omega^2 \Theta_{33}$$

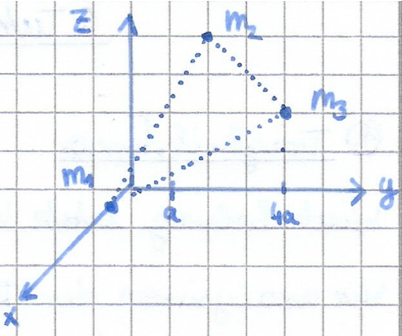
$$\text{mit } \Theta_{33} = \int \rho(\vec{r})\left(x^2 + y^2 + z^2 - z^2\right) d^3r$$

$$= \int \rho(\vec{r})(x^2 + y^2)\, d^3r = \int \rho(\vec{r})\, r_\perp^2\, d^3r = J_A$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_{rot} = \frac{1}{2} J_A \omega^2}}$$

* Vgl. Lagrange Identität (1. Tutorium) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

② Beispiel: 3 Massepunkte



$m_1 = 4m \qquad \vec{r}_1 = (a, 0, 0)$
$m_2 = m \qquad \vec{r}_2 = (0, 2a, 4a)$
$m_3 = m \qquad \vec{r}_3 = (0, 4a, 2a)$

$$\Theta_{jk} = \sum_i m_i \left(\delta_{jk} \vec{r}_i^{\,2} - r_{ij} r_{ik} \right)$$

$$\Theta_{11} = \sum_{i=1}^{3} m_i \left(r_i^2 - r_{i1} r_{i1} \right)$$
$$= 4m(a^2 - a^2) + m(4a^2 + 16a^2) + m(16a^2 + 4a^2) = 40ma^2$$

$$\Theta_{12} = \sum_{i=1}^{3} m_i (-r_{i1} r_{i2}) = -4m(a\cdot 0) - m(0\cdot 2a) - m(0 \cdot 4a) = 0 = \Theta_{21}$$

$$\Theta_{13} = \sum_{i=1}^{3} m_i (-r_{i1} r_{i3}) = -4m(a 0) - m(0\cdot 4a) - m(2a \cdot 0) = 0 = \Theta_{31}$$

$$\Theta_{22} = \sum_{i=1}^{3} m_i (r_i^2 - r_{i2} r_{i2}) = 4m(a^2 - 0) + m(20a^2 - 4a^2) + m(20a^2 - 16a^2)$$
$$= 24ma^2$$

$$\Theta_{23} = \sum_{i=1}^{3} m_i (-r_{i2} r_{i3}) = -m(8a^2) - m(8a^2) = -16ma^2 = \Theta_{32}$$

$$\Theta_{33} = \sum_{i=1}^{3} m_i (r_i^2 - r_{i3} r_{i3}) = 4m(a^2 - 0) + m(20a^2 - 16a^2) + m(20a^2 - 4a^2)$$
$$= 24ma^2$$

$$\Rightarrow \hat{\Theta} = \begin{pmatrix} 40ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 24ma^2 & -16ma^2 \\ 0 & -16ma^2 & 24ma^2 \end{pmatrix} = 8ma^2 \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hauptträgheitsmomente bestimmen: Eigenwertproblem

Eigenwerte von $\hat{\Theta}$ sind die Hauptträgheitsmomente:

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 24ma^2 & -16ma^2 \\ 0 & -16ma^2 & 24ma^2 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda - 24ma^2 & 16ma^2 \\ 16ma^2 & \lambda - 24ma^2 \end{pmatrix} \cdot (\lambda - 40ma^2) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{\left((\lambda - 24ma^2)^2 - 256m^2a^4 \right)}_{\stackrel{!}{=} 0} \underbrace{(\lambda - 40ma^2)}_{\lambda_1 = 40ma^2}$$

$$\lambda^2 - 48ma^2\lambda + 576m^2a^4 - 256m^2a^4 = 0$$
$$\lambda^2 - 48ma^2\lambda + 320m^2a^4 = 0$$

$$\lambda_{2/3} = 24ma^2 \pm \sqrt{576m^2a^4 - 320m^2a^4}$$
$$= 24ma^2 \pm 16ma^2$$

$$\lambda_2 = 40ma^2$$
$$\lambda_3 = 8ma^2$$

Hauptachsen bestimmen: Berechnung der Eigenvektoren